Reconstrucción Tomográfica

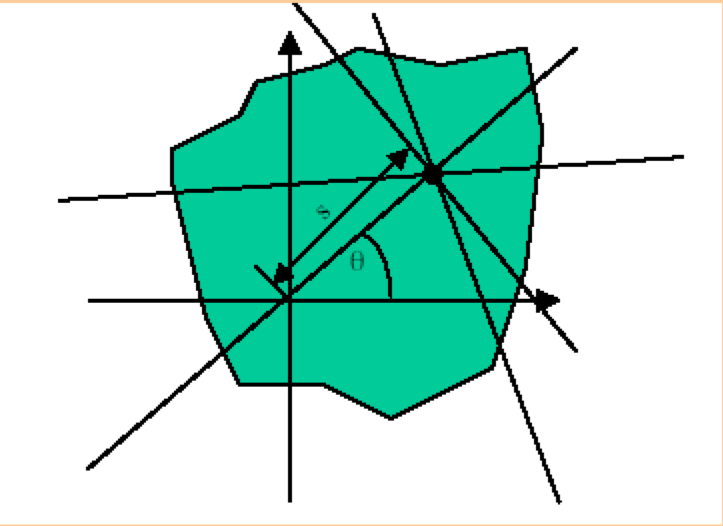
Principios básicos

Transformada de Radon

Teorema de Radon (1917):

El valor de una función integrable en un punto arbitrario se puede obtener unívocamente por medio de su integración a lo largo de todas las líneas que pasan por dicho punto.

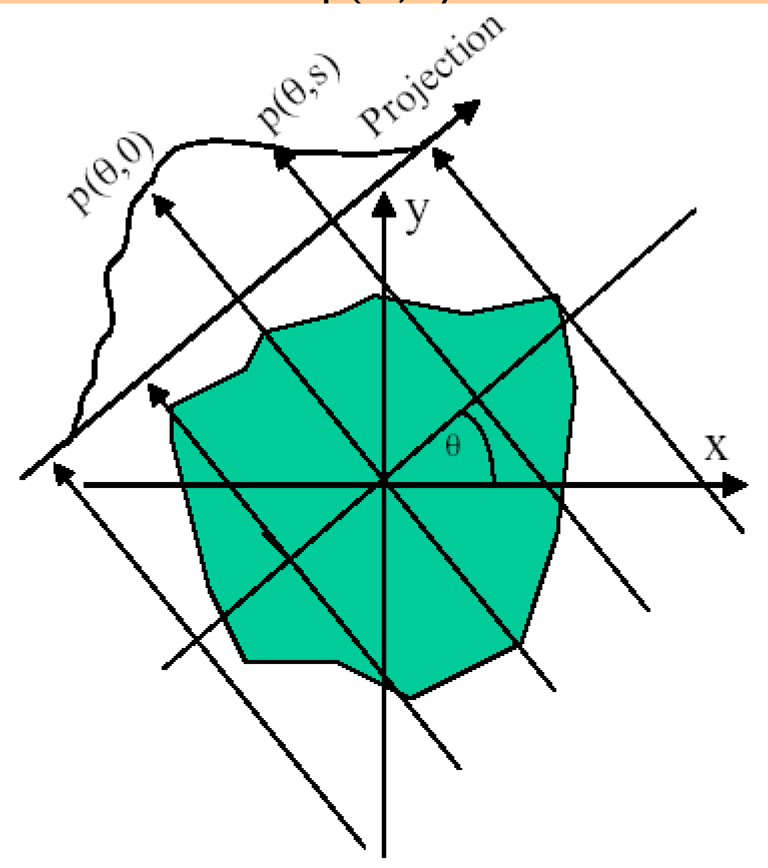
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x(l), y(l))\, dl$$



Transformada de Radon

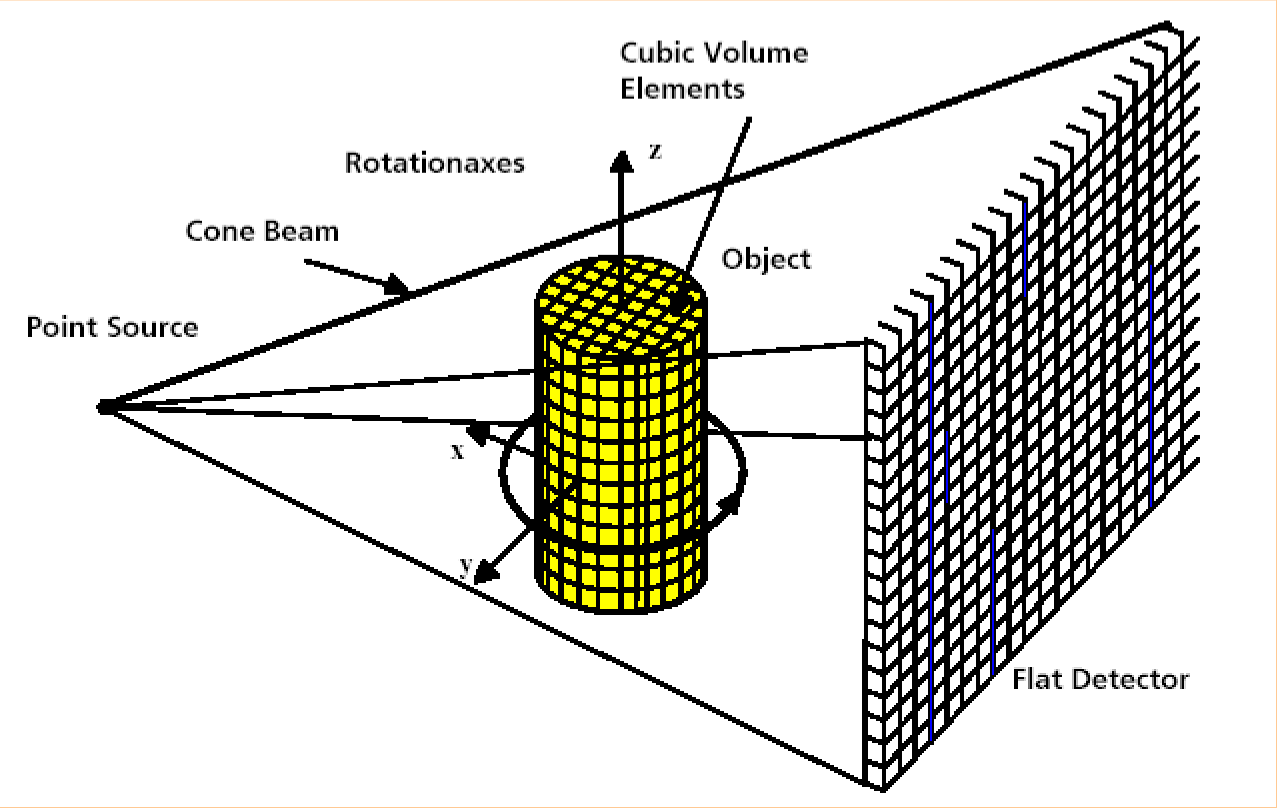
La integral sobre todas las líneas en la misma dirección (θ = const) pero a diferente distancia del origen da lugar a una función 1-D p(θ,s). Esta función se llama <u>proyección</u>

$$\int_{\vec{e}\cdot\vec{r}=s} f(x,y)\,dl = p(\theta,s)$$



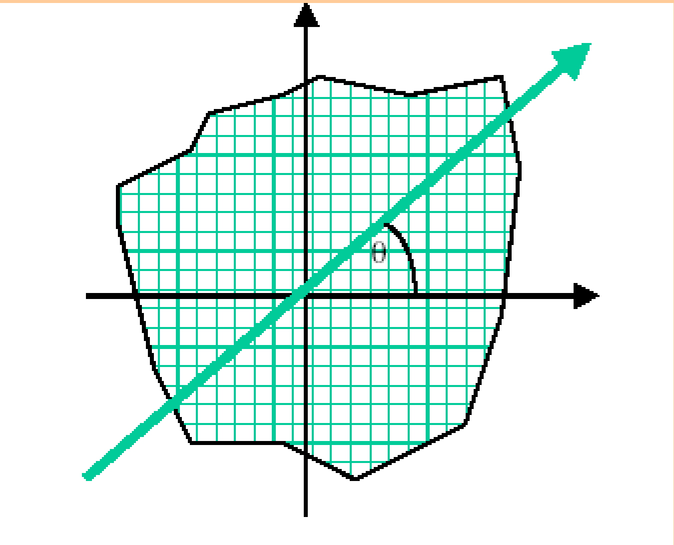
Midiendo todas las proyecciones con $0° < \theta < 180°$ y $s_{min} < s < s_{max}$ obtenemos todas las integrales de línea posibles sobre la función f(x,y)

Geometría 3D general



Reconstrucción iterativa

La idea es construir un gran sistema algebraico cuya solución es la función μ(x,y,z) en algunos elementos de imagen o voxeles.
Se divide el dominio a explorar en voxeles consecutivos numerados e indicados por f_i .
La proyección medida a lo largo de un haz fino da la integral sobre todos los voxeles f_i que se pueden expresar como la suma:

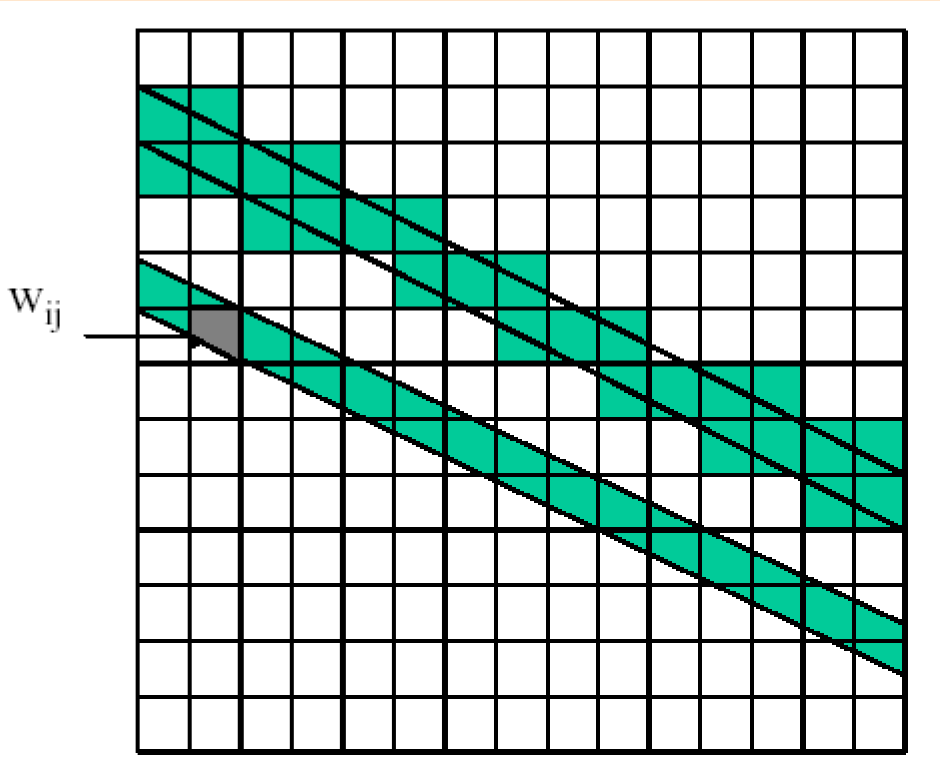


$$p_j = \sum_{i=0}^{n_{elem}} f_i$$

Reconstrucción iterativa

La integral de proyección puede escribirse como la suma sobre valores ponderados de la función. Los factores de peso vienen dados por la intersección entre el haz con espesor d y cada voxel.

Como el haz sólo pasa por algunos voxeles, la mayor parte de los factores de peso w_{ij} son nulos.



$$p_j = \sum_{i=0}^{n_{elem}} w_{ij} \cdot f_i$$

Reconstrucción iterativa

- El sistema de ecuaciones lineales es muy grande
- Para un volumen de 512^3 voxels tenemos 134,217,728 incógnitas.
- En la práctica se miden de 200 a 400 proyecciones
- Con un detector de 512^2 pixels se tienen 104,857,600 datos
- Con esto se tiene un sistema de ecuaciones indeterminado
- La matriz tiene al menos 68,719,476,736 valores no nulos

Teorema de Fourier de corte central

Supongamos la proyección $p_0(s)$ con θ = 0°. Se puede escribir la integral sobre la dirección y:

$$p_0(s) = \int f(x,y)\,dy$$

La transformada de Fourier 1D es:

$$P_0(u) = \int p_0(x) \cdot e^{-j2\pi ux}\,dx$$

que se puede reescribir como:

$$P_0(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int f(x,y)\,dy\right] \cdot e^{-j2\pi ux}\,dx = \int\int f(x,y) \cdot e^{-j2\pi(ux+0y)}\,dxdy = F(u,0)$$

donde F(u,v) es la transformada 2D de Fourier de f(x,y).

Los valores de la transformada 1D de la proyección son iguales a los valores de la transformada 2D a lo largo del eje x

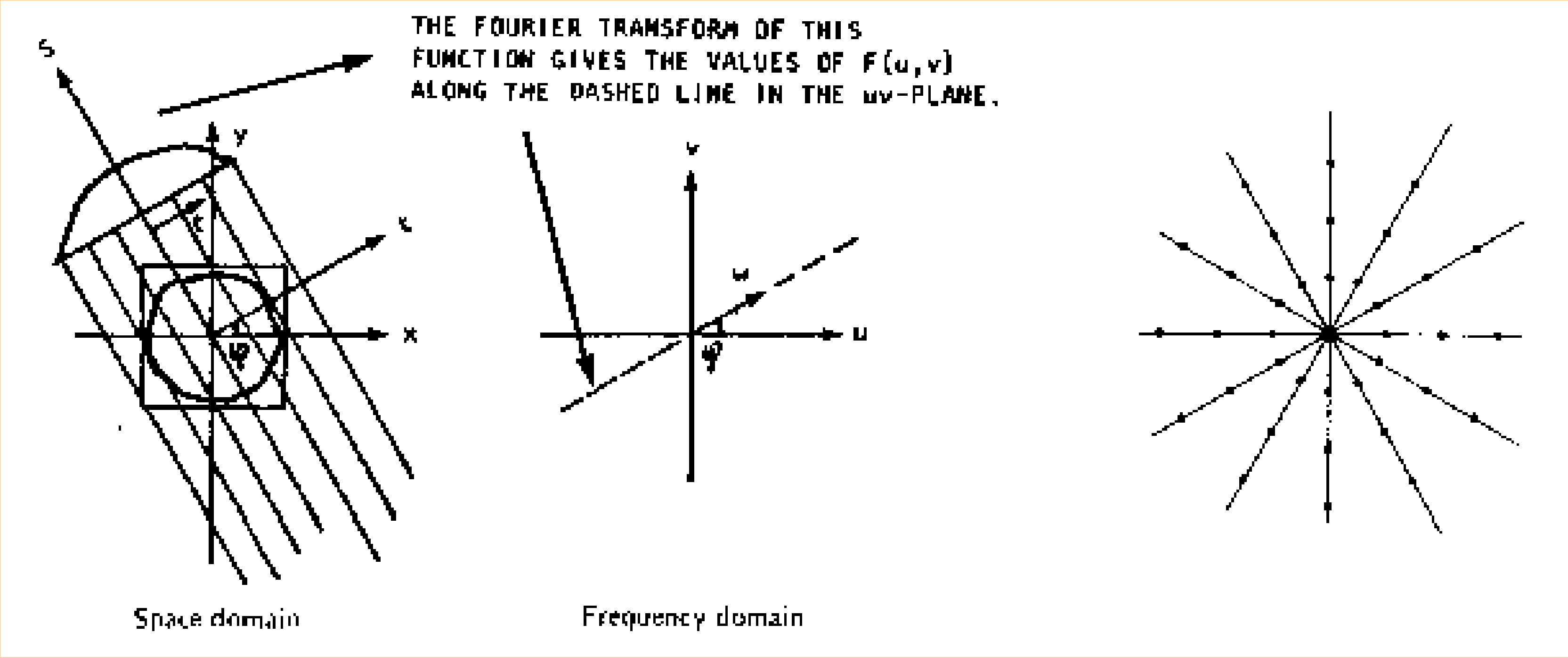
Teorema de Fourier de corte central

Para proyecciones con ángulos $\theta \neq 0$ la proyección puede interpretarse como una proyección en un sistema de coordenadas rotado.
Pero en general se cumple que la transformada de Fourier de una función rotada por un ángulo θ se rota con el mismo ángulo.

Con esto tenemos en Teorema de Corte Central de Fourier:
Para una dada función $f(x,y)$ y su transformada de Fourier $F(u,v)$ con una proyección $p_\theta(s)$ de $f(x,y)$ y su transformada de Fourier 1D $P_\theta(w)$ se cumple:

$P_\theta(w)$ contiene los valores de $F(u,v)$ a lo largo de una línea radial de ángulo θ

Teorema de Fourier de corte central



Luego de la transformada de Fourier 1D los valores vienen dados en coordenadas cilíndricas y deben convertirse a coordenadas cartesianas.

Reconstrucción de Fourier

Con la transformada de Radon y el teorema de Fourier podemos describir un método para reconstruir nuestra función $\mu(x,y)$

1. Encontrar la transformada de Radon de la función midiendo tantas proyecciones $p_\theta(s)$ como sea posible
2. Computar las transformadas de Fourier 1D $P_\theta(w)$ de las proyecciones
3. Armar estas transformaciones en una matriz $F(u,v)$ interpolando los haces radiales en una grilla cartesiana. (módulo y fase)
4. Si es necesario, multiplicar a $F(u,v)$ por un filtro
5. Obtener $\mu(x,y)$ calculando la transformada inversa de Fourier.

Retroproyección filtrada

Es el método más usado para CT. La ecuación principal del mismo puede obtenerse del hecho que f(x,y) puede escribirse como la transformada de Fourier inversa de F(u,v)

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(u,v)\cdot e^{j2\pi(ux+vy)}\,du\,dv$$

Pasando a coordenadas cilíndricas y reescribiendo los límites de integración:

$$f(x,y) = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} F(w,\theta)\cdot e^{j2\pi\cdot w(x\cdot\cos(\theta)+y\cdot\sin(\theta))}\left|w\right|\,dw\,d\theta$$

Con la sustitución s = x cos(θ) + y sin(θ) y el teorema de Fourier se tiene:

$$\boxed{f(x,y) = \int_{0}^{\pi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} P_\theta(w)\cdot\left|w\right|\cdot e^{j2\pi\cdot ws}\,dw\right]d\theta = \int_{0}^{\pi}\left[\tilde{p}_\theta(w)\right]d\theta}$$

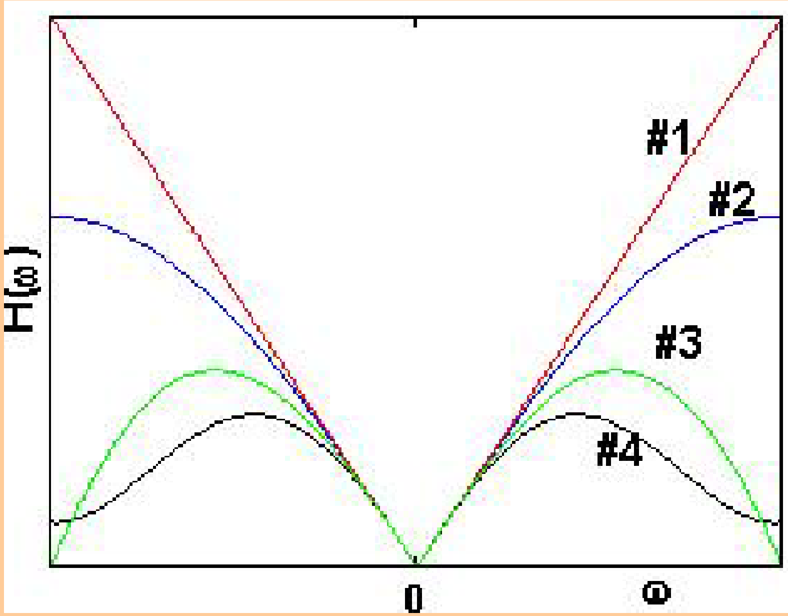
Retroproyección filtrada

Miremos con atención al término $\tilde{p}_\theta(w)$
Excepto por el factor |w| parece la transformada inversa de una proyección. Pero como está multiplicada por |w| en el espacio de Fourier es una ***proyección filtrada.***

Investigando la respuesta impulso del filtro |w|, se obtiene la función filtro h(s) en el espacio (x,y), que puede expresarse como una función límite:

$$\frac{\varepsilon^2 - (2\pi s)^2}{\left(\varepsilon^2 - (2\pi s)^2\right)^2} \xleftrightarrow[\text{Fourier}]{} |w| \cdot e^{-\varepsilon|w|}$$

Para ε>0 h(s) tiende a $-1/(2\pi s)^2$

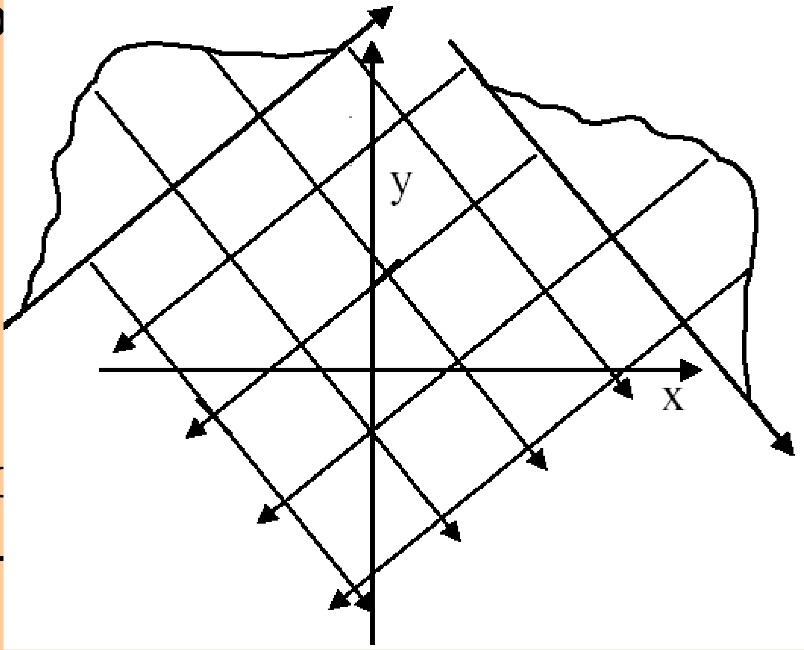


Respuesta impulso H(ω)
para algunos filtros prácticos

Retroproyección filtrada

$$f(x,y) = \int_{0}^{\pi} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} P_{\theta}(w) \cdot |w| \cdot e^{j2\pi \cdot ws}\, dw \right] d\theta = \int_{0}^{\pi} \left[\widetilde{p}_{\theta}(w) \right] d\theta$$

De esta ecuación tenemos que se puede determinar f() en el punto (x,y) sumando todas las proyecciones filtradas en
s = x cos(θ) + y sin(θ)



Se puede procesar una proyección con ángulo θ completamente calculando las líneas con s=const. y luego sumar el valo de la proyección a todos los pixeles atra- vesador por la línea.
Esto se conoce como **Retroproyección**

Retroproyección filtrada

Fantoma original

Transformada de Radon (sinograma)

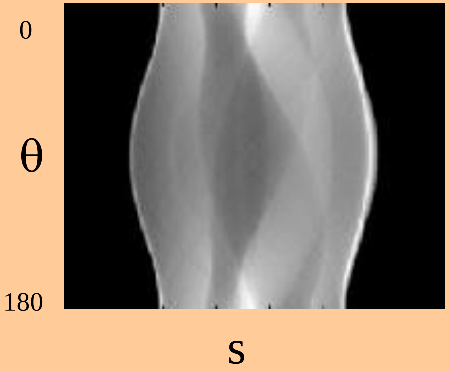


Imagen retroproyectada simple

Imagen filtrada retroproyectada